20 학년도 (   )학기 과제물

교과목명 : 수학의 이해
학　　번 :
성　　명 :

---

o 과제유형 : (　　) 형
o 과 제 명
1. 유클리드의 원론에 대해서 논하여라.
2. 3차방정식의 근의 발견문제는 오늘날 카르다노에게 그 공을 돌리고 있는데 그 이유에 대하여 논하여라.
3. 피타고라스 정리를 각자 독특한 방법을 사용하여 증명하라.
4. 주어진 원과 면적이 같은 정사각형을 작도하는 것이 불가능한 이유를 설명해 보라 .

과제1) 유클리드의 원론에 대해서 논하여라.

고대그리스인 유클리드는 B.C.300년경에 기존의 그리스 기하학에 플라톤(Platon)의 철학 이데아론을 반영하여 명확한 논법으로 체계화된 결과들로 이루어진 13권의'원론'을 편찬했다. 이 책은 '공리로부터의 증명'을 처음으로 시작하여 논리적 체계로 집대성하였다. 그러나 도형에 관한 것 이외에 현대 수학의 실수론의 원형인 양의 일반론과 정수론 등을 포함하고 있으며, 이것들을 증명하기 위하여 도형적인 말을 많이 썼고, 도형에 관한 부분이 가장 많이 포함되어 있기 때문에 <기하학원론>으로 번역되는데[1], 기하학에 관한 선조들의 업적을 토대로 하여 공준적 방법이 기하학에 최초로 적용된 역사적으로 기하학적 사고에 전환점을 가져온 매우 중요한 기념비적인 작품이다. 2000년 이상 모든 기하학의 교육을 좌우해 온 이 책은 1482년에 처음으로 인쇄된 이래 1000번 이상 재판이 나와 성경을 제외한다면 이 책보다 널리 사용되고 연구된 책은 없다.
이 책의 구성을 살펴보면, 제1권부터 제4권까지 그리고 제7권, 제9권은 피타고라스(Pythagoras)학파의 이론이고, 제8권은 아프키타스(Archytas), 제5권, 제6권, 제12권은 에우독소스(Eudoxus), 그리고 제10권과 제13권은 테아이데토스(Theatetus)의 이론이다. 이중에서 유클리드 자신의 것은 제10권 무리수이다. 총13권으로 이루어진 '원론'은

---

1) 오늘날 '원론'이라고 부르고 있는 이 낱말은 본래 그리스말로는 스토이케이아(stoicheia)라 하는 '입문' 또는 '초보'의 뜻이었다. 그 후 로마 사람들이 이것을 엘레멘타(Elementa)라고 번역했고, 다시 영어로 엘리먼트(Elements)라고 고쳐 불렀다. 그러니까 본래는 '기하학 입문' 정도로 풀이해야 할 것을 잘못하여 이렇게 딱딱한 번역이 되고 만 것이다.

23개의 정의(definition), 5개의 공준(postulate), 5개의 공리 또는 일반개념(common notion)만을 근거로 두고 기하학의 모든 명제를 연역적 추론에 의해 유도하여 나아갔다. 제1권에서는 48개의 명제가 증명되어 있고, 13권을 모두 합치면 그 명제의 수는 무려 465개에 달한다.

책의 내용과 의의를 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

제1권은 서론적인 23개의 정의, 5개의 공준, 5개의공리로 시작하여 48개의 명제로 구성되어 있으며, 대부분의 내용은 초기 피타고라스학파에 의하여 연구된 결과들이다. 제2권은 2개의 정의와 14개의 명제들로 구성되어 있는 책으로서 면적 변환과 피타고라스학파의 기하학적 대수형태로 도형의 면적을 이용한 계산과 같은 대수적 변환을 취급하고 있다. 제3권은 11개의 정의와 37개의 명제로 이루어진 책으로서 11개의 정의는 등원, 활꼴, 부채꼴 등 원(圓)에 관한 것이다. 제4권은 7개의 정의와 16개의 명제들로 구성되어있고, 정의는 내접, 외접, 직선도형의 내·외접이 있다. 제5권은 에우독소스(Eudoxus)의 비례론에 관한 훌륭한 해설서로 18개의 정의와 25개의 명제로 되어있다. 이 이론은 같은 표준으로 재어질 수 있는 크기나 그렇지 않는 크기에 모두 응용될 수 있는 것으로서 무리수의 발견으로 인한 피타고라스학파의 ‘논리적 스캔들’을 바로 해결하게 되었다. 이 에우독소스의 비례론은 그 후에 데데킨트(Dedekind)와 바이어슈트라스(Weierstrass)에 의해 발전된 실수계의 기초를 제공해 주게 된다. 제6권은 4개의 정의와 33개의 명제로 되어있으며, 제5권의 에우독소스의 비례론을 평면기하에 응용한 내용으로 닮은 삼각형이나 사각형, 그 밖의 다각형 사이의 비나 비례의 정리를 증명에 이용하고 있다. 제7권에서 제10권까지는 수론(數論)을 다룬 부분으로, 제7~9권은 정수론을 다루었다 제10권은 16개의 정의와 115개의 명제가 실려 있는데, 많은 학자들이 이 책을 가장 주목할 만한 책으로 꼽고 있다. 그 이유는 어떤 주어진 선분에 관하여 같은 표준으로 잴 수 없는 선분 즉, 무리수에 관한 내용을 다루고 있기 때문이다. 제11권은 29개의 정의와 39개의 명제로 구성되어 있고, 입체기하를 내용으로 하고 있다. 제12권은 18개의 명제로 구성되어 있으며, 체적에 관한 문제로 시작하여 반지름의 세제곱으로 구(球)의 체적의 비율을 반지름의 제곱으로 원의 면적의 비율로 나타낸다. 원기둥과 내접된 직원추(直圓錐)간의 관계 등을 에우독소스(Eudoxus)적 방법으로 증명하였다. 기하학적 과정을 이루는 각주(角柱)로 연속분할을 통하여 피라미드의 체적을 결정했으며, 또한 실진법(悉盡法, method of exhaustion) 및 부피의 취급에 중대한 역할을 하고 있다. 제13권은 18개의 명제로 되어있으며, 정다면체와 그것들에 의해서 결정된 불합리성을 내포하는 테아이테터스(Thaetetus)의 관찰과 연속분할에 관한 에우독소수(Eudoxus) 연구에 기초를 두고 있다. 이들 정리를 가설로 결정하고 거기에는 다섯 개의 정다면체가 존재하고 다섯 개의 정다면체를 구에 내접시키는 작도를 발전시켰다.

과제2) 3차방정식의 근의 발견문제는 오늘날 카르다노에게 그 공을 돌리고 있는데 그 이유에 대하여 논하여라.

제레니모 카르다노(Hieromimo Cardano)는 1501년 이탈리아 파비아(Pavia)에서 태어났다. 파비아 대학에 진학하였고 여러 번 대학을 옮겨 다닌 끝에 의학박사 학위를 취득했다.1543년 의학과 교수로서 파비아 대학교로 가게 되었는데, 많은 저술활동을 한다. 특히 수학에 관해서 집중적으로 쓰게 되었다.

그러던 와중에 카르다노는 타르탈리아로부터 $x^3+ax=N$형태의 방정식 해법을 배우게 된다. 그러나 이 3차방정식 해법을 알고 있어도, 정식의 3차방정식이 가질 수 있는 모든 형태의 문제들을 풀 수는 없었다. 그 시대에는, 없는 항들은 사실은 없는 것이 아니라 계수가 0임을 몰랐다. 또한 모든 항들을 어느 한쪽으로 몰아넣고, 같다는 기호 반대쪽에 0을 놓는 기술을 아직 배우기 이전이었다. 이 두 가지 조건을 만족해야만, 3차방정식을 푸는 공식을 찾았다고 말할 수 있었던 것이다.

이 두 가지 조건을 생각하여 3차방정식의 유형을 살펴보면 모두 13가지 유형들이 있다. 그 각각의 해법들을 고안해 낸 사람이 바로 카르다노였다. 카르다노가 해법을 고안해 낸 13가지 유형들은 다음과 같다.

① 세제곱항과 일차항을 더한 것이 상수와 같다.
② 세제곱항이 일차항과 상수를 더한 것과 같다.
③ 세제곱항과 상수를 더한 것이 일차항과 같다.
④ 세제곱항이 제곱항과 상수를 더한 것과 같다.
⑤ 세제곱항과 제곱항을 더한 것이 상수와 같다.
⑥ 세제곱항과 상수를 더한 것이 제곱항과 같다.
⑦ 세제곱항, 제곱항, 일차항을 더한 것이 상수와 같다.
⑧ 세제곱항과 일차항을 더한 것이 제곱항과 상수를 더한 것과 같다.
⑨ 세제곱항과 제곱항을 더한 것이 일차항과 상수를 더한 것과 같다.
⑩ 세제곱항이 제곱항, 일차항, 상수를 더한 것과 같다.
⑪ 세제곱항과 상수를 더한 것이 제곱항과 일차항을 더한 것과 같다.
⑫ 세제곱항, 일차항, 상수를 더한 것이 제곱항과 같다.
⑬세제곱항, 제곱항, 상수를 더한 것이 일차항과 같다.

과제3) 피타고라스 정리를 각자 독특한 방법을 사용하여 증명하라

<증명>

$\angle 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ $\overline{CB}=a$라 하자.
이제 $\overline{AC}$ = $\overline{AD}$이도록 점 D를 $\overline{BA}$의 연장선상에 $\overline{AC}$ = $\overline{AE}$가 되도록 E를 잡는다.
그러면 꼭짓점 D, E, C는 중심이 A이고, 반지름의 길이가 b인 원주 상에 위치한다.
따라서 $\angle DCE = 90^\circ$ 이고, $\angle BCD = \angle ACE$이다.
한편 $\triangle ACE$는 이등변삼각형이므로 $\angle CEA = \angle ECA$ 이다.
$\triangle DBC$와 $\triangle CBE$에서, $\angle DBC$는 공통이고 $\angle BCD = \angle CBE$이므로 $\triangle DBC \backsim \triangle CBE$이다.
따라서 $\overline{BC} : \overline{BE} = \overline{BD} : \overline{BC}$이다.

$$a : (a+b) = (c+b) : a$$
$$a^2 = (c+b)(c-b)$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$

과제4) 주어진 원과 면적이 같은 정사각형을 작도하는 것이 불가능한 이유를 설명해 보라.

만일 주어진 원에서 반지름의 길이를 1로 잡으면 그 원의 넓이는 π가 된다. 그러므로 면적이 같은 정사각형의 변의 길이는 $\sqrt{\pi}$가 된다. 결국 $\sqrt{\pi}$ 작도 문제가 되며 π를 작도 할 수 있다면 작도 가능한 모든 실수의 제곱근은 작도 가능하므로 $\sqrt{\pi}$는 작도 가능하다.

그러나 주어진 단위 길이로부터 작도 가능한 수는 대수적 수이며 주어진 단위 길이로부터 유리계수를 가지지만 유리근을 갖지 않는 3차 방정식의 근을 크기로 하는 선분은 작도할 수 없고 원주율 π는 초월수이므로 π는 작도 불가능하다.
따라서 임의의 원과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이는 작도 불가능하다.