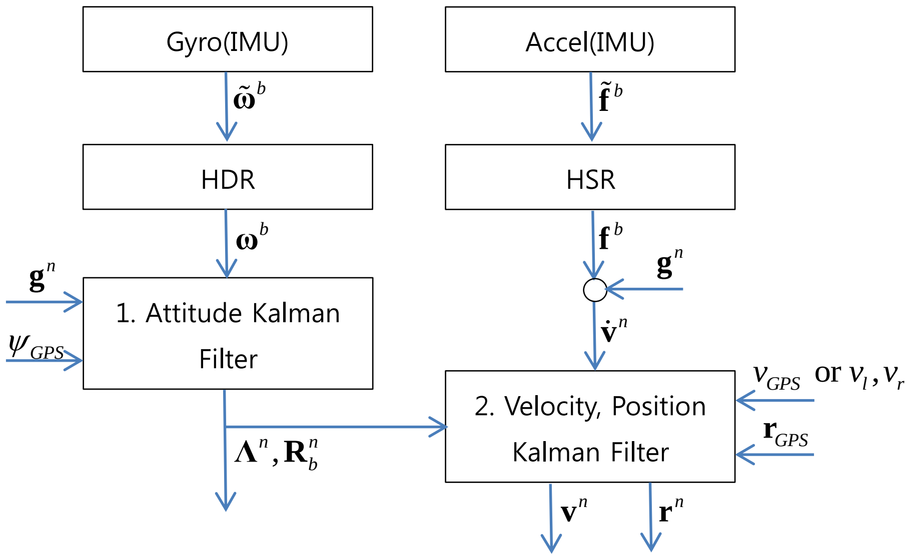
Kalman Filter로 IMU와 GPS 결합

지구자전효과와 중력 모델을 고려하지 않은 INS 설계

KITECH 양광웅 작성

관성항법시스템(INS, Inertial Navigation System)은 vehicle의 초기 위치로부터 자이로와 가속도 센서의 각속도와 가속도를 적분하여 현재 vehicle의 자세와 속도, 위치를 계산한다. 여기서는 INS 시스템을 단순화 하여 지구자전효과와 중력 모델을 고려하지 않는다. 그리고 자세를 계산하기 위하여 quaternion을 사용한다.

INS(관성항법시스템)의 알고리즘 구성도



$\boldsymbol{\Lambda}^n = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$	항법 좌표계에서 오일러각으로 차량의 방위 표시
$\mathbf{R}_b^n$	오일러각에 대응하는 회전행렬
$\mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$	항법 좌표계에서 차량의 속도 (X-북쪽, Y-동쪽, Z-지구중심 방향 속도)
$\mathbf{r}^n = [x \quad y \quad z]^T$	항법 좌표계에서 차량의 위치
$\mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -1]^T$	항법 좌표계에서 단위 중력가속도
$\mathbf{f}^b = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T$	가속도 센서로 측정한 가속도 (동체 기준 x, y, z 축 방향 가속도)
$\boldsymbol{\omega}^b = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$	자이로 센서로 측정한 각속도 (동체 기준 x, y, z 축 각속도)
$\mathbf{r}_{GPS} = [\varphi \quad \lambda \quad h]^T$	GPS에서 측정한 차량의 위도, 경도, 고도
v_{GPS}, ψ_{GPS}	GPS에서 측정한 차량의 속도와 진행 방향

GPS에서 측정한 차량의 위도, 경도, 고도와 항법 좌표계에서 차량의 위치는 다음 관계가 있다.

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{D}\mathbf{r}_{GPS}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} R_N + h & 0 & 0 \\ 0 & -(R_E + h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IMU 센서의 보정

IMU 센서의 출력이 각속도와 가속도 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b$, $\tilde{\mathbf{f}}^b$ 일 때 HDR(Heuristic Drift Reduction) 알고리즘과 HSR(Heuristic Scale Regulation) 알고리즘을 사용하여 드리프트와 스케일이 보정된 $\boldsymbol{\omega}^b$ 와 $\mathbf{f}^b$ 를 계산한다.

$$\boldsymbol{\omega}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^b - \mathbf{b}_g$$

여기서 바이어스 값 $\mathbf{b}_g$ 를 계산하기 위해 HDR 알고리즘을 사용한다. (HDR 문서 참조)

$$\mathbf{f}^b = s_a \tilde{\mathbf{f}}^b$$

여기서 스케일 펙터 s_a 를 계산하기 위해 HSR 알고리즘을 사용한다. (HSR 문서 참조)

1. Attitude Kalman Filter

Initialize

Kalman Filter에 사용할 상태변수를 회전행렬과 오일러각으로 표시하고, 공분산 행렬은 오일러각의 공분산으로 표시한다. (회전행렬에 대한 공분산이 아님에 주의)

상태변수:

$\mathbf{x} \triangleq \mathbf{R}_b^n$ (회전행렬에 대한 상태변수)
$\mathbf{y} \triangleq \boldsymbol{\Lambda}^n$ (오일러각에 대한 상태변수)

오일러각에 대한 공분산 행렬:

$$
\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\psi} \\ \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\psi} \\ \sigma_{\phi\psi} & \sigma_{\theta\psi} & \sigma_{\psi\psi} \end{bmatrix}
$$

상태변수와 공분산 행렬은 다음과 같이 초기화 한다.

$$
\hat{\mathbf{x}}_{k=0} = \mathbf{I}_{3\times3}
$$
$$
\hat{\mathbf{y}}_{k=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
$$

$$
\mathbf{P}_{k=0} = 10^8 \mathbf{I}_{3\times3}
$$

Attitude Predict

시스템 모델

센서에서 측정되는 각속도는 회전행렬의 미분과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$
\dot{\mathbf{R}}_b^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{\Omega}^b
$$

여기서 $\mathbf{\Omega}^b$ 는 $\boldsymbol{\omega}^b$ 의 skew symmetric 행렬로 다음과 같이 정의된다.

$$
\mathbf{\Omega}^b \triangleq \boldsymbol{\omega}^b \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}
$$

그리고 오일러각의 미분은 각속도와 다음과 같은 관계가 있다.

$$
\dot{\mathbf{\Lambda}}^n = \mathbf{C}_1^{-1} \boldsymbol{\omega}^b
$$

여기서 $\mathbf{C}_1^{-1}$ 은 자이로 센서에서 측정한 각속도를 오일러각의 변화율로 변환하기 위한 행렬이다.

$$
\mathbf{C}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}
$$

상기 행렬에서 $\theta \approx \pm\pi/2$ 인 경우 $\cos\theta \approx 0$ 이므로 행렬 원소의 분모가 0에 가까워 지는 경우가 발생한다. 하지만 이러한 경우에는 차량이 수직으로 서는 경우를 의미하기 때문에 자동차와 같은 경우는 발생하지 않을 것이다.

Predict

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{I}+\mathbf{\Omega}^b\Delta t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\mathbf{R}_z(\omega_z\Delta t)\mathbf{R}_y(\omega_y\Delta t)\mathbf{R}_x(\omega_x\Delta t)$$
$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \hat{\mathbf{y}}_{k-1} + \mathbf{C}_1^{-1}\boldsymbol{\omega}^b\Delta t$$

오일러 각에 대한 공분산은 다음과 같이 업데이트 한다.

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{C}_1^{-T}(\Delta t)^2$$

여기서 $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_\phi^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\psi^2)$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$\sigma_\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_\phi & \sigma_\theta & \sigma_\psi \end{bmatrix}^T = 10 + \boldsymbol{\omega}^b$$

Attitude Update by Gravity

중력에 의한 차량의 자세측정 모델

"중력에 의한 차량의 각도측정 모델"을 참고하면 $\tilde{\phi}, \tilde{\theta}$ 를 구할 수 있다. 이 각들로부터 차량의 자세를 나타내는 행렬은 다음과 같이 보정된다.

$$\mathbf{R}_b^n \leftarrow \mathbf{R}_y(\tilde{\theta})\mathbf{R}_x(\tilde{\phi})\mathbf{R}_b^n$$

그리고 오일러 각은 다음과 같이 보정된다.

$$\mathbf{\Lambda}^n \leftarrow \mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{C}_0^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{C}_0^{-1}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{C}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi/\cos\theta & \sin\psi/\cos\theta & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\tan\theta & \sin\psi\tan\theta & 1 \end{bmatrix}$$

차량의 자세측정 모델 함수 $h(\cdot)$ 는 다음과 같이 오일러 각을 변환 없이 그대로 사용한다.

$$h(\mathbf{\Lambda}^n) = \mathbf{\Lambda}^n$$

자세 측정 값 $\mathbf{z}_k$ 는 $\tilde{\phi}, \tilde{\theta}$ 를 사용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{C}_0^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Attitude update

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{R}_y (K_\theta \Delta\theta) \mathbf{R}_x (K_\phi \Delta\phi) \hat{\mathbf{x}}_k^-$$
$$\hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{y}}_k^-))$$

여기서 K_ϕ 는 $\mathbf{K}_k$ 의 1행 1열 원소이고, K_θ 는 $\mathbf{K}_k$ 의 2행 2열 원소이다.

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^-$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- (\mathbf{P}_k^- + \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{R} \mathbf{C}_0^{-T})^{-1}$$

여기서 $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(\sigma_\phi^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\psi^2)$ 을 다음과 같이 계산한다. 왜냐하면, 가속도의 크기가 1g 근처일때 이득이 커야하고 1g에서 멀어질수록 이득이 적어야 한다.

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = 0.1 + 100 \left| \left\| \mathbf{f}^b \right\| - 1 \right| + 100 \left\| \boldsymbol{\omega}^b \right\|, \quad \sigma_\psi = 10^8$$

Attitude Update by GPS Heading and Velocity

GPS의 위치 변위에 의한 각도측정 모델

차량의 형태가 자동차와 같은 경우는 운동 방향이 X축으로 고정되어 있다. 그래서 GPS에서 측정한 속도와 방위 데이터로부터 차량의 자세를 업데이트 할 수 있다.

먼저, GPS의 속도 v_{GPS} 와 방위 ψ_{GPS} 를 읽어온다. 그리고 회전행렬 $\mathbf{R}_b^n$ 로부터 차량의 yaw 각을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\psi_v = \tan^{-1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right)$$

여기서 a_{ij} 는 회전행렬 $\mathbf{R}_b^n$ 의 i번째 행과 j번째 열의 원소다.

이제 GPS에서 측정한 각 ψ_{GPS} 와 차량의 진행 방향 ψ_v 로부터 차량의 자세를 나타내는 행렬은 다음과 같이 보정된다.

$$\mathbf{R}_b^n \leftarrow \mathbf{R}_z(\tilde{\psi})\mathbf{R}_b^n, \quad \tilde{\psi} \triangleq \psi_{GPS} - \psi$$

그리고 오일러 각은 다음과 같이 보정된다.

$$\mathbf{\Lambda}^n \leftarrow \mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{C}_0^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix}$$

차량의 자세측정 모델 함수 $h(\cdot)$는 다음과 같이 오일러 각을 그대로 사용한다.

$$h(\mathbf{\Lambda}^n) = \mathbf{\Lambda}^n$$

자세 측정 값 $\mathbf{z}_k$ 는 $\tilde{\psi}$ 를 사용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{C}_0^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix}$$

Attitude update

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{R}_z(K_\psi \tilde{\psi})\hat{\mathbf{x}}_k^-$$
$$\hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-))$$

여기서 K_ψ 는 $\mathbf{K}_k$ 의 3행 3열 원소이다.

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{P}_k^-$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-(\mathbf{P}_k^- + \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{R}\mathbf{C}_0^{-T})^{-1}$$

여기서 $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(\sigma_\phi^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\psi^2)$ 을 다음과 같이 계산한다. ($\epsilon = 10^{-6}$, $\sigma_{GPS} = 10$)

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = 10^8, \quad \sigma_\psi = \frac{2\sigma_{GPS}}{\epsilon + v_{GPS}}$$

2. Velocity, Position Kalman Filter

Position, Velocity Predict

시스템 모델

차량 좌표계에서 측정된 가속도 센서 값을 항법 좌표계로 변환 후 중력을 제거한다.

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{f}^b - \mathbf{g}^n$$

차량의 속도에 대한 식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{r}}^n = \mathbf{v}^n$$

상기 수식들을 다음과 같이 상태방정식 형태로 만든다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^n \\ \dot{\mathbf{r}}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^n \\ \mathbf{r}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^n & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^b \\ \mathbf{g}^n \end{bmatrix}$$

상태변수:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^n \\ \mathbf{r}^n \end{bmatrix}$$

Predict

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k \Delta t$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \Delta t^2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t$$

$$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_{f_x}^2, \sigma_{f_y}^2, \sigma_{f_z}^2, \sigma_{g_x}^2, \sigma_{g_y}^2, \sigma_{g_z}^2)$$

Velocity Update

차량의 속도 측정 모델

차량의 좌우 바퀴에 장착된 엔코더를 읽어와 차량의 전진 속도를 계산한다. 차량은 전방(차량 좌표계의 X축 방향)으로만 운동이 가능하므로, 차량 좌표계에서 차량의 속도는 다음과 같은 식이 된다.

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \dfrac{v_r + v_l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 v_r, v_l 은 각각 오른쪽 바퀴의 속도와 왼쪽 바퀴의 속도다.

좌우 바퀴의 공분산 $\mathbf{V}$ 는 차량의 속도에 대한 공분산 $\mathbf{R}$ 로 다음과 같이 전파된다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}\mathbf{V}\mathbf{Z}^T$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{z}_k}{\partial (v_r, v_l)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_{v_r}^2, \sigma_{v_l}^2)$$

항법 좌표계에서의 속도 $\mathbf{v}^n$ 는 차량 좌표계의 속도로 다음과 같다.

$$h(\mathbf{v}^n) = \mathbf{R}_n^b \begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Update

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_k^-$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

Position Update

GPS 위치 측정 모델

"TM 좌표와 GPS 좌표(WGS84)간의 관계"를 이용하여 GPS로 측정한 위도(φ), 경도(λ), 고도(h)를 항법 좌표계의 XYZ 좌표로 변환한다.

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{D}\mathbf{r}_{GPS}$$

항법 좌표계의 XYZ 좌표로 변환된 데이터를 장시간 수집한 후, 이들 데이터들로부터 $\mathbf{z}_k$의 공분산을 계산한다.

$$\mathbf{R} = \mathrm{Var}(\mathbf{z}_k)$$

항법 좌표계에서 차량의 위치 $\mathbf{r}^n$는 변환 없이 TM 좌표로 표시된다.

$$h(\mathbf{r}^n) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Update

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_k^-$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

Normalization of Rotation Matrix

회전행렬이 계속해서 업데이트된다면 수치 계산의 미소한 오류가 누적되어 행렬의 직교성이 만족되지 않는다 ($\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}}^T \neq \mathbf{I}$).

먼저, 가장 간단한 방법은 회전행렬 $\tilde{\mathbf{R}}$ 을 특이값분해(singular value decomposition)하여 특이값을 1로 바꾼 후 재조립 하면 된다.

또다른 방법으로 다음과 같은 수식을 사용할 수도 있다.

$$\mathbf{R} = 2\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{R}}^T\tilde{\mathbf{R}})^{-1}$$

항법 좌표와 GPS 좌표(WGS84)간의 관계

먼저, GPS로부터 수신한 위도(φ), 경도(λ), 고도(h)를 TM 좌표계로 변환한다.

TM좌표계는 지표면에서 남북 방향이 x-축이고, 동서 방향이 y-축이다. x-축은 북쪽이 +방향이고, y-축은 동쪽이 +방향이다.

우리나라 TM(Transverse Mercator) 좌표계 원점의 경위도 값:
- 중부원점: N38, E127

$$\begin{bmatrix} x_{TM} \\ y_{TM} \\ z_{TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_N + h & 0 & 0 \\ 0 & (R_E + h)\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi - \varphi_0 \\ \lambda - \lambda_0 \\ h - 0 \end{bmatrix}$$

여기서 h 는 고도를 나타내며 R_N 과 R_E 는 각각 북쪽 자오선 방향과 동쪽 방향 곡률 반경을 의미한다 그리고 φ_0 와 λ_0 는 TM좌표계 원점의 위도와 경도 상수다.

$$R_N = \frac{R_0(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}, \quad R_E = \frac{R_0}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

여기서 $R_0 = 6378137.0$ 와 $e = 0.081819191$ 는 각각 지구 타원의 장축과 이심률이다.

그리고, TM 좌표를 항법 좌표로 변환한다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{TM} \\ y_{TM} \\ z_{TM} \end{bmatrix}$$

중력에 의한 차량의 자세 측정

중력가속도는 항상 지구 중심으로 향하기 때문에 가속도 센서에 다른 힘이 작용하지 않을 경우 $\mathbf{g} = (0, 0, -9.81)$가 측정된다. 가속도 센서에서 측정한 가속도와 중력가속도를 비교함으로 센서의 자세를 보정할 수 있다. 하지만 이러한 조건은 가속도 센서에 작용하는 힘이 오직 중력만 있을 때 가능하다. 중력가속도와 이러한 힘을 분리하여 측정할 수 없기 때문에, 중력가속도 외 다른 힘이 작용하고 있는 조건은 $\|\mathbf{a}\| \approx \|\mathbf{g}\|$인지 확인해 보는 것이 제일 간단한 방법이다.

가속도 센서에서 측정한 가속도 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$에는 중력가속도와 센서의 가속에 의한 다양한 종류의 가속도가 포함되어있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}^T \mathbf{g} \qquad (\because \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}) \\ &= \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 $\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x & \dot{v}_y & \dot{v}_z \end{bmatrix}^T$는 선가속도이며 $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}^T$는 관성좌표계에서 중력가속도 값 $(0,\ 0,\ -9.81)$을 가진다.

위 식에서 선가속도 $\dot{\mathbf{v}}$가 0이고 각속도 $\boldsymbol{\omega}$가 0일 때는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}$$

오일러각으로 정리하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_z}, \quad \sin\theta = -\frac{a_x}{g_z}.$$

$$\phi = \operatorname{atan2}\left(-a_y, -a_z\right), \quad \theta = \operatorname{asin}\left(-\frac{a_x}{g_z}\right).$$

Calculation of Euler Angle Velocity using Angular Velocity

오일러각의 회전속도(Euler Angle Velocity)는 각속도(Angular Velocity)로부터 계산 가능하다.

ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:

오일러각이 Z축→Y축→X축 변환 순서를 따르는 경우, 기준좌표계에 대한 각속도 ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$)와 오일러각(ϕ, θ, ψ)의 회전속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi) \cdot \mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

상기 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_0 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_0^{-1} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi / \cos\theta & \sin\psi / \cos\theta & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi\tan\theta & \sin\psi\tan\theta & 1 \end{bmatrix}$$

물체좌표계에 대한 각속도와 오일러각의 회전속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.
(주의: 기준좌표계에 대한 물체좌표계가 $\boldsymbol{\omega}$ 로 회전하고 있기 때문에 좌표계를 동일하게 만들기 위해서 $\boldsymbol{\omega}$ 를 기준좌표계로 변환하여야 한다: $\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\boldsymbol{\omega}$)

$$\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x^T(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x^T(\phi)\mathbf{R}_y^T(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

상기 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\mathbf{C}_1\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix},\ \ \mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}1&0&-\sin\theta\\0&\cos\phi&\sin\phi\cos\theta\\0&-\sin\phi&\cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix}=\mathbf{C}_1^{-1}\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix},\ \ \mathbf{C}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&\sin\phi\tan\theta&\cos\phi\tan\theta\\0&\cos\phi&-\sin\phi\\0&\sin\phi/\cos\theta&\cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}$$

Euler Angles

오일러각(Euler Angles)는 3차원 공간에서 물체의 방위를 표시하기 위한 3개 각도의 조합이다. 오일러각으로 물체를 회전할 때는 회전 순서에 주의하여야 한다. 회전순서(X축→Y축→Z축 or Z축→Y축→X축 등 각 축 별 회전 순서의 조합)에 따라 물체의 회전된 최종 방위가 달라지기 때문이다.

일반적으로 ZYX (Roll-Pitch-Yaw) 회전과 XYZ 회전이 주로 사용된다.

ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:

기준좌표계에 대한 물체좌표계의 회전 결과는 다음과 같이 계산된다:

1. 기준좌표계를 X-축(Yaw)을 중심으로 ϕ 만큼 회전한다: $\mathbf{R}_x(\phi)$
2. 기준좌표계를 Y-축(Pitch)을 중심으로 θ 만큼 회전한다: $\mathbf{R}_y(\theta)$
3. 기준좌표계를 Z-축(Roll)을 중심으로 ψ 만큼 회전한다: $\mathbf{R}_z(\psi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{zyx}&=\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi&\sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi&\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi\\\cos\theta\sin\psi&\sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi&\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi\\-\sin\theta&\sin\phi\cos\theta&\cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_x(\phi)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi\\0&\sin\phi&\cos\phi\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi&-\sin\psi&0\\\sin\psi&\cos\psi&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$